



TITLE:

# 分離バネモデルを用いた金属ブロック-薄板界面の分調波発生の数値解析

AUTHOR(S):

林, 高弘; 辰巳, 淳

---

CITATION:

林, 高弘 ...[et al]. 分離バネモデルを用いた金属ブロック-薄板界面の分調波発生の数値解析. 非破壊検査 2015, 64(12): 593-600

ISSUE DATE:

2015-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/229112>

RIGHT:

© 2015 The Japanese Society for Non-Destructive Inspection; 発行元の許可を得て登録しています.

## 論文

分離バネモデルを用いた金属ブロック—薄膜界面の  
分調波発生の数値解析

林 高弘\*, 辰巳 淳\*

## Numerical Analysis of Sub-harmonic Wave Generation at Thin Layer — Metal Block Interfaces with a Separable Spring Model

Takahiro HAYASHI\* and Atsushi TATSUMI\*

## Abstract

Sub-harmonic wave generation at double contact interfaces consisting of a thin aluminum alloy layer sandwiched by aluminum alloy blocks was numerically analyzed. If a separable spring model is introduced to a one dimensional finite difference time domain scheme, the calculation results qualitatively agree with the experimental ones in variation of sub-harmonic wave amplitude. The amplitude variations of sub-harmonic waves with incident wave amplitude, interfacial stiffness, contact pressure, frequency, and layer thickness revealed that the sub-harmonic generation is caused by the complicated wave field at the double interfaces and thin layer as well as the separation of interfaces.



## Key Words

Non-linear ultrasonic, Sub-harmonic wave, Separable spring model, Finite difference time domain scheme

## 1. 緒言

超音波計測により検出される固体材料の非線形特性として、有限変形を考慮した幾何的非線形と結晶格子の非調和や転位、内部摩擦などを由来とする材料非線形、き裂や界面などの接触による境界非線形の三つが挙げられる<sup>1)</sup>。

このうち、固体接触界面においては特に大きな非線形現象が現れることが実験的に示されている。Solodov らはこの現象を Contact Acoustic Nonlinearity (CAN) と呼び、き裂の検出に利用できることを示した<sup>2)–4)</sup>。Kawashima らは、水浸法により基本波を用いた C スキャン画像では得られない微細な欠陥を高調波画像により取得した<sup>5), 6)</sup>。また、Yamanaka, Ohara らは、固体接触面で発生する分調波に注目し、フェイズドアレイ技術と組み合わせて Subharmonic Phased Array for Crack Evaluation (SPACE) による疲労き裂、応力腐食割れの画像化に成功した<sup>7)–10)</sup>。

そのような非破壊材料評価を目的とした実験的な研究の基礎として、固体接触界面における超音波の非線形応答に関する理論的な研究が古くから行われている。特に固体接触界面において発生する入射（加振）周波数の整数倍の成分である高調波の発生現象については、多くの研究者によって詳細に検討されている<sup>11)–20)</sup>。初期の研究は、Richardson により行われ、静的な圧力によって接触している界面における波動伝搬を一次元の波動方程式を基に解き、界面の開閉口による高調波の発生を示した<sup>11)</sup>。また、Baik, Thompson らは、固体内の不完全接合部をバネでモデル化し、様々な形状のき裂や介在物に対しその応答を評価した<sup>12)</sup>。また、Rokhlin らは固体接触界面間に薄い粘弾性層がある境界条件を議論し、バネモデルと同様の表記となることを示した<sup>13), 14)</sup>。このバネモデルは、界面接触を論じる上でその後広く利用され、Lavrentyev

ら<sup>15)</sup>、Baltazar ら<sup>16), 17)</sup>、Drinkwater ら<sup>18)</sup> など、実験結果と非常に良く合う結果を示している。近年では、Biwa ら<sup>19)</sup> が Richardson の一次元解析の枠組みから非線形バネモデルを構築し、接触界面を透過する基本波およびその二倍の周波数成分である二次高調波を定量的に示した。

一方、固体接触界面において発生する入射周波数の整数分の 1 の成分である分調波の発生メカニズムに関する研究は非常に少なく<sup>7), 20), 21)</sup>、その現象については不明な点が多い。その中で、著者らはアルミ合金ブロック間に薄いアルミニウム箔を挿入したような二重の接触界面に超音波を入射すると、比較的小さい振幅でも分調波が得られることを実験的に示し、その分調波の発生が静的な接触圧力、入射波振幅、表面粗さに大きく依存していることを明らかにした<sup>22)</sup>。

本研究では、この実験的な研究結果を基に、金属ブロック間に薄膜を挟んだ二重接触界面を透過する超音波伝搬の数値計算を行い、入射周波数の 1/2 の周波数成分（以後 1/2 分調波と呼ぶ）の発生現象を解析する。

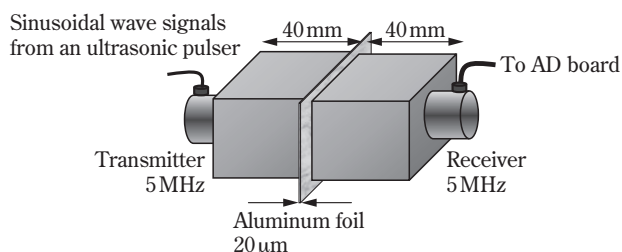
## 2. 金属ブロック間に薄膜を挟んだ二重接触界面における 1/2 分調波

1/2 分調波発生の数値解析を行う前に、ここではアルミ合金ブロック間にアルミ箔を挿入した試験体に対し透過波を受信したときの測定結果を示す。

Fig.1 はそのアルミブロック試験体と超音波探触子および万力の位置関係を示す模式図である。アルミ合金ブロック (A5052, 40 × 50 × 40 mm<sup>3</sup>) の接触界面は #2000 のエメリー紙で研磨されており、アルミ箔の厚みは 20 μm である。これらを万力で挟み、接触圧力を調整・計測しながら、界面を透過する超音波を受信した。アルミブロック両側の超音波トランスデューサには中心周波数が 5 MHz のオリンパス V109 を用い、送信トランスデューサには 5 MHz, 60 サイクルのパースト波を超音波信号発生装置 (Ritec RPR-4000) より印加し、受信トランスデューサで検出した波形は増幅などを行わず直

原稿受付：平成 27 年 1 月 22 日 掲載決定：平成 27 年 9 月 4 日

\* 京都大学 大学院工学研究科 (京都府京都市西京区京都大学桂 C3 棟)  
Graduate school of Engineering, Kyoto University  
(Kyotodaiagaku-katsura C3, Nishikyo-ku, Kyoto, 615-8540, Japan)

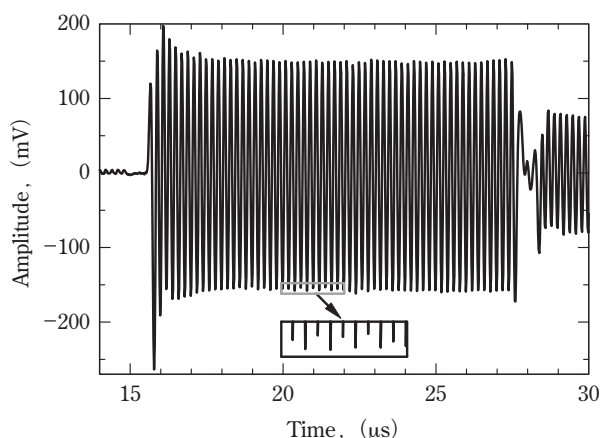


**Fig.1** Schematic figure of experiments for measuring sub-harmonic wave generation

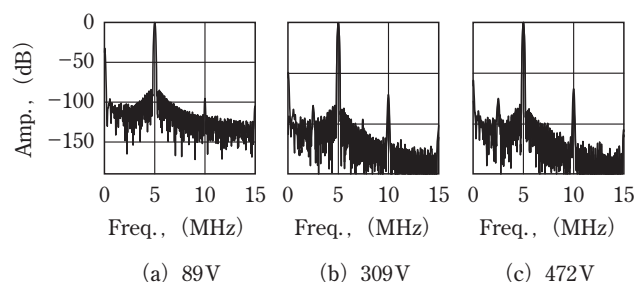
接 AD 変換器で収録した。

**Fig.2** は接触圧力 0.126 MPa, 入力電圧 472 V<sub>p-p</sub> の時に得られた受信波形である。27.5  $\mu$ s 以下の大きな波形が直接透過波であり、それ以降の波形は長さ 40 mm のアルミブロック間を一往復した波形である。波形中央部分の振幅変化を見やすいように 20  $\mu$ s ~ 22  $\mu$ s 間の波形ピーク部分を拡大図に示した。この拡大図より、振幅が一つおきに変化している様子が確認できる。これは、入射波の基本周波数に対し 1/2 の周波数の成分 (1/2 分調波) が大きく現れていることを示している。

受信波形に対し 17  $\mu$ s ~ 27  $\mu$ s 間の信号を抽出し、ハミング窓を掛けてフーリエ変換を行った結果を **Fig.3** に示す。(a) - (c) は超音波トランスデューサへの入力電圧が異なる結果を示している。文献 22) において、同一の実験系に対し入力電圧がほぼ入射波振幅に比例していることが示されており、Fig.3 の結果が入射波振幅の違いによる受信波形の周波数スペクトルの変化を示していると言える。いずれも 5 MHz の基本波とその二次高調波である 10 MHz のピークが明瞭に現れている。しかし、2.5 MHz の 1/2 分調波のピークは、最も入力電圧の小さい (a) では現れておらず、(b), (c) では明瞭なピークとして得られている。このスペクトルピークの変化を示したのが、Fig.3 (d) である。入力電圧約 150 V を境にして、急激に振幅が上昇し、1/2 分調波が現れるようになることが分かる。



**Fig.2** Received waveform for contact pressure of 0.13 MPa and input voltage of 472 V<sub>p-p</sub>



**Fig.3** Frequency spectra and sub-harmonic amplitude change with input voltage

このような閾値現象や 1/2 分調波振幅の変動に関し、文献 22) では接触圧力および表面粗さに注目して議論している。

### 3. 分離を考慮した界面バネモデルを導入した数値計算

著者らは、上述の実験結果において 1/2 分調波が現れる一因を界面が振動によって衝突するクラッピング現象によるものと推測した<sup>22)</sup>。これは、Solodov<sup>3)</sup> や Ohara<sup>8)</sup> によっても実験的に示されており、同様にクラッピング現象によるものと推測される 1/2 分調波を確認している。

クラッピング現象を模擬するためには、界面モデルとして広く利用されている Baik, Thompson<sup>12)</sup> の界面バネモデルでは不十分であり、界面の分離も考慮したモデルが必要となる。

Hertz の弾性接触理論<sup>23)</sup> では、球体同士が接触する際に、球体に働く接触力は、球体中心間距離の近接距離  $\delta^*$  ( $> 0$ ) の 3/2 乗に比例し、近接距離  $\delta^* < 0$  では分離するため、接触力がゼロとなる (**Fig.4** (a) 模式図参照)。実際の固体接触界面では、Greenwood, Williamson<sup>24)</sup> のような突起高さの分布を考慮する必要がある、また、突起先端は多かれ少なかれ塑性変形が起こる上、JKR, DMT model<sup>25), 26)</sup> として知られるような凝着力も存在する。単に球体の接触を考えた Hertz の接触モデルに比べ、凹凸の分布により曲線の傾きが変化し、凝着力に起因する負の界面力が現れる (**Fig.4** (b))。Biwa<sup>19)</sup> はこれらを包括する形で実験結果に対応するモデルとして、べき乗則モデルを提案し、Drinkwater<sup>18)</sup> の実験結果に対応する係数を示している。またその中で、接触圧力  $p$  は近接距離  $\delta^*$  の二次関数となるとしている (**Fig.4** (c))。Kogut と Etsion<sup>27)</sup> は有限要素解析により弾塑性接触における圧力  $p$  と近接距離  $\delta^*$  の関係を示しており、塑性変形の度合いにより接触圧力  $p$  が近接距離  $\delta$  の 1.425 乗または 1.263 乗に比例することを示し、Kim, Lee<sup>28)</sup> はその結果を基に、塑性変形を

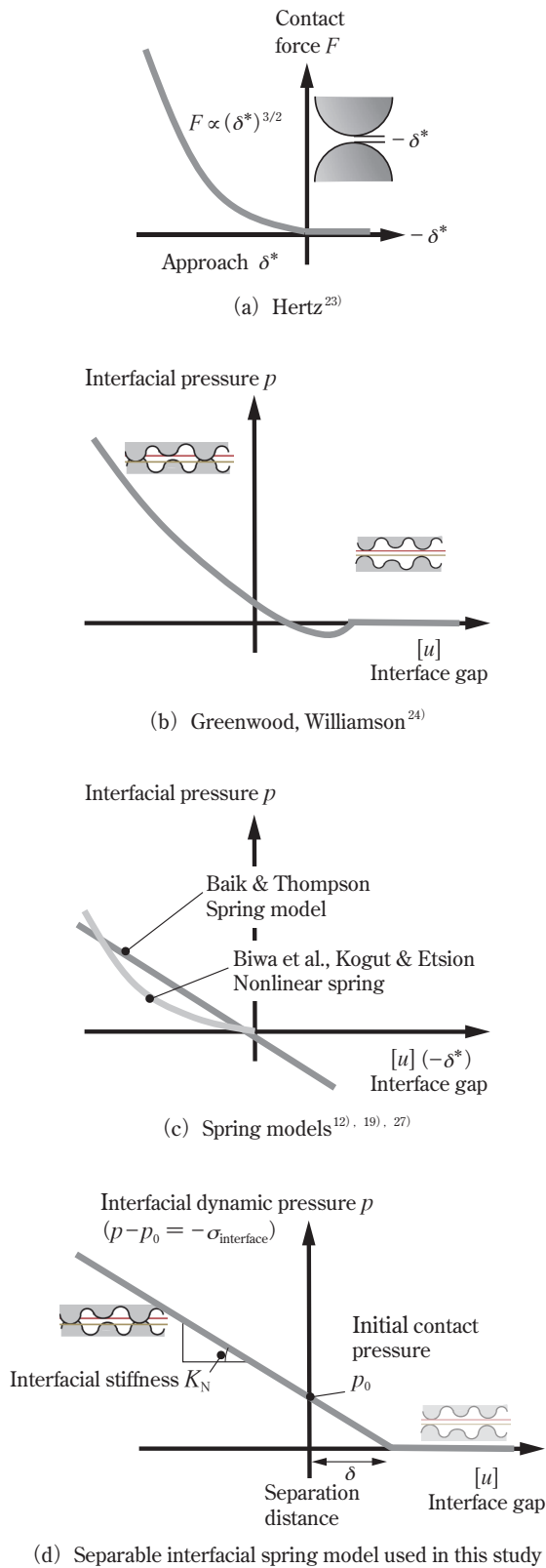


Fig.4 Contact interfacial models

考慮した固体接触界面の非線形音響特性を示す微視構造モデルを議論した<sup>27)</sup>。

このように、接触界面の剛性は様々な要因により変化するため、すべての状況を表す接触界面のモデル化は容易ではない。そこで本報では、多数の研究者によりその妥当性を検証されてきた上述の接触界面モデルをできるだけ踏襲しつつ、後の数値計算におけるパラメータ数を少なくするために、静

的な初期接触圧力  $p_0$  と垂直界面剛性  $K_N$  の二つのパラメータのみに依存するようにした分離型バネモデル (Fig.4 (d)) を採用した。すなわち、接触圧力が初期接触圧力  $p_0$  に等しい時の界面間距離  $[u]$  をゼロとし、界面間距離がある代表距離  $\delta$  を超えるとき ( $[u] > \delta$ )、相互に作用する圧力  $p$  はゼロとなり界面は分離する。また  $[u] < \delta$  の時、界面に作用する接触圧力  $p$  と界面間距離  $[u]$  は、垂直界面剛性  $K_N$  により線形関係にあるとする。ここで、Greenwood, Williamson ら<sup>24)</sup> の界面の凹凸を考慮したモデルでは、距離  $\delta$  は界面上のすべての突起が分離した距離に対応する。

界面を透過、反射する過渡的な波動伝搬の数値計算には、Finite Difference Time Domain (FDTD) 法<sup>29)</sup> を用いた。FDTD 法では、応力  $\sigma$ 、粒子速度  $v$  を変数として、構成式

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

および運動方程式

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + f \quad \dots\dots\dots (2)$$

を蛙とび法により差分化し、以下のように次の時間ステップの応力および速度を計算する。

$$\sigma_j^{k+1/2} = \sigma_j^{k-1/2} + \rho c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} (v_{j+1/2}^k - v_{j-1/2}^k) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$v_{j+1/2}^{k+1} = v_{j+1/2}^k + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (\sigma_{j+1}^{k+1/2} - \sigma_j^{k+1/2}) + \frac{\Delta t}{2\rho} (f_{j+1}^{k+1/2} + f_j^{k+1/2}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $f$  は物体力、 $\rho$  は密度、 $c$  は伝搬する波動の音速、 $\Delta t$ 、 $\Delta x$  は時間および空間方向のステップ間隔である。また、添え字  $j$  は空間方向  $j$  番目のセルに対する値であることを示し、 $k$  は時間方向  $k$  番目のステップの値であることを示す。このとき、変位  $u$  は、速度の積分として与えられ、

$$u_{j+1/2}^k = u_{j+1/2}^{k-1} + v_{j+1/2}^{k-1} \Delta t \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。

Fig.5 に示すとおり、固体接触界面には分離バネが挿入されており、二つの界面上の変位をそれぞれ  $u_{\text{interface}}^-$  と  $u_{\text{interface}}^+$  として表すと、界面間隔は

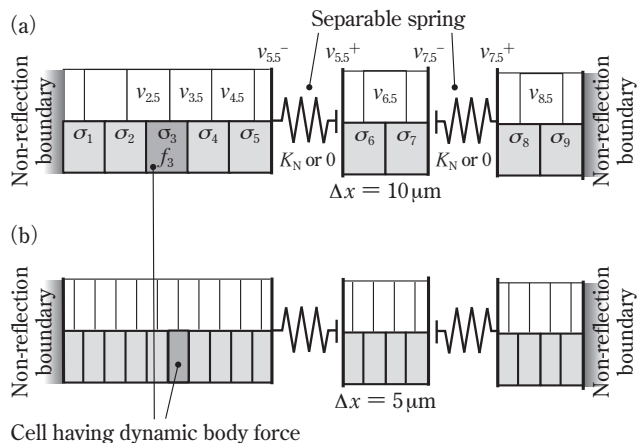
$$[u]_{\text{interface}}^k = u_{\text{interface}}^{k+} - u_{\text{interface}}^{k-} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と表すことができる。接触界面では Fig.4 に示したように界面間隔  $[u]_{\text{interface}}^k$  に応じた応力が境界条件として負荷される。ただし数値解析においては、初期状態  $p = p_0$ 、 $[u]_{\text{interface}} = 0$  の基準点からの差を計算するため、 $[u]_{\text{interface}} = 0$  において界面に負荷される垂直応力をゼロとみなす。すなわち、数値計算において利用される界面の境界条件式は、Fig.4 を  $p$  方向に  $-p_0$  だけ平行移動し、境界における応力の正負を考慮して

$$\sigma_{\text{interface}}^k = \begin{cases} -(p - p_0) = K_N [u]_{\text{interface}}^k, & [u]_{\text{interface}}^k < \delta \\ p_0, & [u]_{\text{interface}}^k > \delta \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。これは、界面が接触しているとき ( $[u]_{\text{interface}}^k < \delta$ )、界





**Fig.5** Calculation settings for the FDTD scheme for  $\Delta x =$  (a)  $10\ \mu\text{m}$  and (b)  $5\ \mu\text{m}$

面は、垂直接触界面剛性  $K_N$  を比例定数として界面間距離に比例する反発力を受けることを表しており、界面が分離しているとき ( $[u]_{\text{interface}}^k > \delta$ )、界面は初期接触圧力  $p_0$  を受けて元の位置に戻ろうとすることを意味する。

また、ここでは時間変化する物体力を一つのセル (幅  $\Delta x$ ) に与えることで入射波を励起した。このとき、物体力を与えるセルの位置を  $x_s$  とし、

$$f = F \exp(-i\omega t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

のような振幅  $F$  の調和振動を与えたとき、 $x$  軸正方向に伝搬する入射波は

$$u = \frac{-iF \sin(k\Delta x/2)}{\rho\omega^2} \exp[i\{k(x-x_s) - \omega t\}], \quad x > x_s \quad \dots\dots\dots (9)$$

のように解析的に得られ<sup>30)</sup>、この関係から所望の変位振幅  $A_{\text{in}}$  を得るための物体力の振幅を

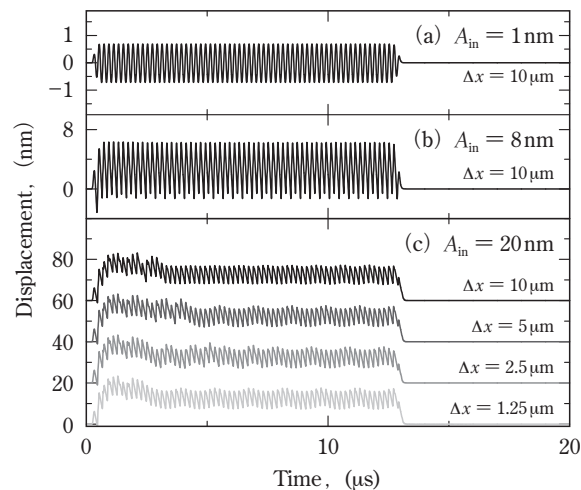
$$A_{\text{in}} = \frac{F \sin(k\Delta x/2)}{\rho\omega^2} \Rightarrow F = \frac{\rho\omega^2 A_{\text{in}}}{\sin(k\Delta x/2)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

のように決定した。

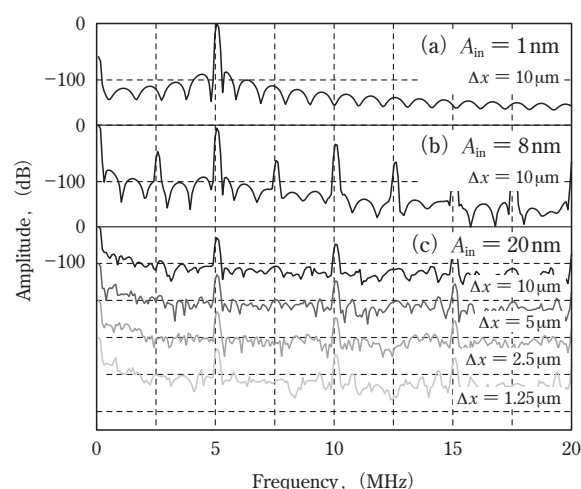
初めに、膜厚  $h = 20\ \mu\text{m}$  の場合に対し、Fig.5 (a) に示すようなセル構成で透過波の計算を行った。すなわち、左右端を無反射境界とし、物体力を与えるセルを左から3番目、5番目と6番目のセル間および7番目と8番目のセル間にFig.4および式(7)で表される分離バネがあるとして、全部で9個セルのみで計算を行った。この時空間ステップは、後の数値解析の際に現れる最大周波数20 MHzの時の波長  $315\ \mu\text{m}$  より十分小さい  $\Delta x = 10\ \mu\text{m}$  とし、時間ステップはFDTD法の安定解を得るクーラン条件を満たす  $\Delta t = 1\ \text{ns}$  とした。

**Fig.6, 7** の黒実線は得られた透過波形とその周波数スペクトルである。金属ブロックとそれに挟まれた薄膜は、同質のアルミニウム合金とし、アルミ箔の厚み  $h = 20\ \mu\text{m}$ 、界面剛性  $K_N = 0.5\ \text{MPa/nm}$ 、初期接触圧力  $p_0 = 1\ \text{MPa}$ 、入射波の中心周波数 (基本周波数)  $f_0 = 5\ \text{MHz}$  とし、入射波のバーストサイクルを60とした。周波数スペクトルは、 $1\ \mu\text{s} \sim 12.5\ \mu\text{s}$  間の波形を抽出しハミング窓を掛けた後、フーリエ変換を行い取得した。

入射波振幅  $A_{\text{in}}$  が小さい (a)  $1\ \text{nm}$  の場合は、界面において



**Fig.6** Waveforms for various amplitudes of incident wave and various numbers of cells



**Fig.7** Frequency spectra of the waveforms in Fig.6

分離が起こらないため、透過波形状は入射波形状とほとんど同じとなり、振幅スペクトルには、基本周波数のみが現れている。 $A_{\text{in}} = 8\ \text{nm}$  では、透過波形はわずかに乱れ、Fig.2中の拡大図に見られたような1/2分調波の存在を示す二周期ごとの振幅変化が見られた。それ以外に、Fig.7の周波数スペクトルでは基本波の3/2倍の分調波成分や基本波の二倍三倍といった高調波成分も見られ、明瞭な非線形現象が起こっていることが分かる。これは、 $A_{\text{in}} = 8\ \text{nm}$  の入射波により界面が大きく開口することで、分離バネモデルにおいて傾きが変化する非線形領域を往復していることを示している。Fig.6 (a) (b) の波形の傾向は、Fig.2, 3および前報22)の実験結果でも現れており、分離バネモデルが接触界面を定性的には良く表していると言える。さらに振幅を大きくし、 $A_{\text{in}} = 20\ \text{nm}$  とすると (Fig.6, 7 (c))、透過波形はDC成分および低周波成分を大きく含んでおり、その波形は大きく乱れたものとなった。これは、入射波変位が大きいため界面が大きく弾かれた後、透過側界面が右に移動した状態で、静的な接触圧力  $p_0$  により戻ろうとする作用と、向かい側界面に接触する作用の繰り返しが起こっているためである。

以上の結果は、上述の通り概ね直観的な界面の分離現象を表しているが、計算結果の妥当性をより正確に検証するため、

以下に時間・空間ステップ  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  を細かくした場合の計算結果を比較した。Fig.5 (b) は、をそれぞれ  $1/2$  の  $\Delta t = 0.5\text{ns}$ ,  $\Delta x = 5\mu\text{m}$  にしたときのセル構成であり、 $1/4$ ,  $1/8$  にしたときの結果を Fig.6, 7 に示す。 $A_{\text{in}} = 1\text{nm}$ ,  $8\text{nm}$  の場合には、いずれの場合にも波形および周波数スペクトルは全く違いが見られなかったため、Fig.6, 7 (a), (b) には  $\Delta x = 10\mu\text{m}$  の場合のみを示している。一方、振幅の大きい  $A_{\text{in}} = 20\text{nm}$  の場合には、波形、スペクトルともにセル数の変化によってわずかに変化した。これは、界面が分離するバネを採用している本モデルでは、高速で接触、分離をすることにより高周波成分が無視できなくなり、それらの界面の分離に影響を及ぼすためであると考えられる。しかし、明瞭な  $1/2$  分調波が得られない  $A_{\text{in}} = 20\text{nm}$  のような大きな振幅の領域において DC 成分、低周波成分が大きいという傾向は一致しており、後の議論においてもこの振幅領域において精緻な計算精度を必要としないことから、本報の数値実験においては、最も高速で計算できる  $\Delta x = 10\mu\text{m}$  の場合として計算することとした。これにより細かくパラメータを変化させた次章の計算結果が得られるようになった。

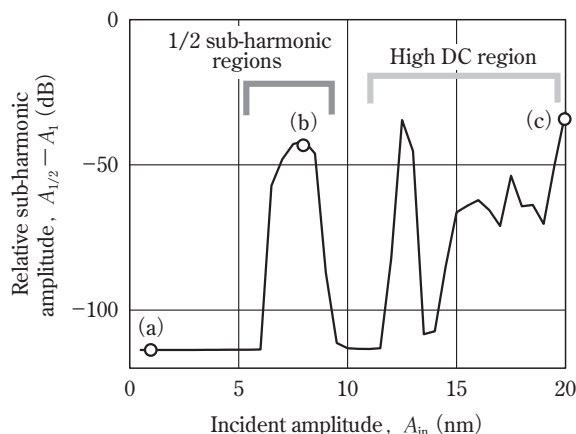
#### 4. 様々なパラメータ値に対する $1/2$ 分調波の発生に関する検討

$1/2$  分調波の発生は、振幅だけでなく、様々な要因により変化する。本章では、分離バネモデルに使われる二つのパラメータ（界面剛性  $K_N$  および接触圧力  $p_0$ ）と入射波に関する二つのパラメータ（振幅  $A_{\text{in}}$  および入射周波数  $f_0$ ）、さらには膜厚を変化させたときの  $1/2$  分調波振幅について議論する。

##### 4.1 入射振幅、界面剛性、接触圧力依存性

Fig.8 は界面剛性  $K_N = 0.5\text{MPa/nm}$ 、接触圧力  $p_0 = 1.0\text{MPa}$ 、入射波周波数  $f_0 = 5\text{MHz}$ 、膜厚  $h = 20\mu\text{m}$  で一定とし、様々な入射波振幅に対し、前出の計算手法により透過波を計算し、その周波数スペクトルの  $1/2$  分調波成分  $A_{1/2}$  の変化を示したグラフである。縦軸は、Fig.2 の実験結果に従って  $A_1$  に対する  $A_{1/2}$  の値をデシベル表示で示した。

$A_{\text{in}}$  が小さい間は、 $A_{1/2}$  が全く現れなかったが、 $A_{\text{in}} = 4.5\text{nm}$  において急激に  $A_{1/2}$  が出現し、その後  $A_{1/2}$  が小さくなった後に、 $A_{1/2}$  だけでなく DC 成分や低周波成分が広い範囲に大き



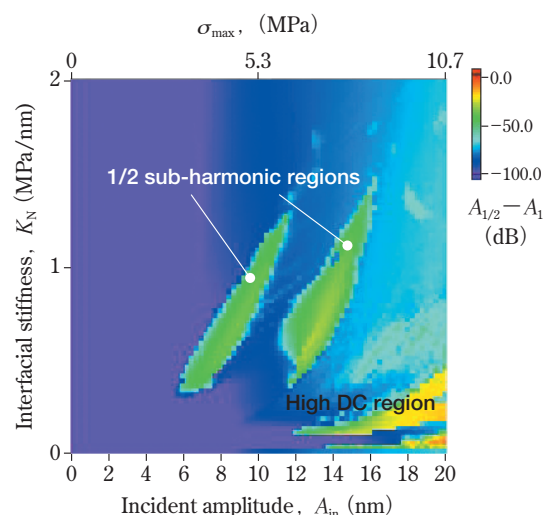
**Fig.8** Relative  $1/2$  sub-harmonic amplitude change with incident amplitude

$K_N = 0.5\text{MPa/nm}$ ,  $p_0 = 1.0\text{MPa}$ ,  $f_0 = 5\text{MHz}$ ,  $h = 20\mu\text{m}$

く現れる Fig.6, 7 (c) のような領域へと遷移した。この  $A_{\text{in}}$  がある振幅以上で急激に上昇する現象は、Fig.3 の実験結果におおむね対応している。また、Fig.8 (b) 点よりも右のような振幅上昇後の挙動については、Fig.3 の実験結果では入射振幅が小さく計測できていないと考えられる。

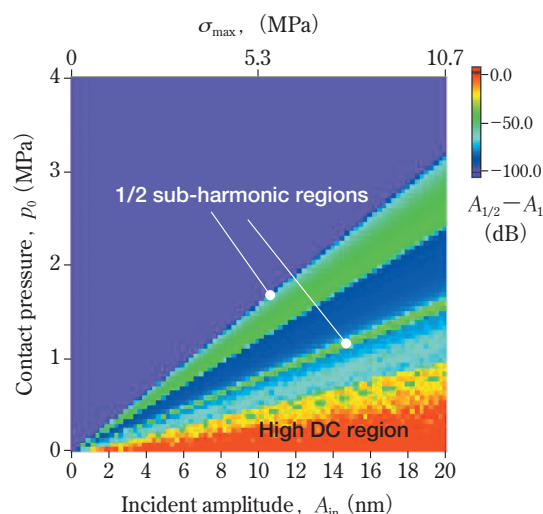
Fig.9, 10 は、 $A_{\text{in}}$  だけでなく、接触界面の状態を表すパラメータ  $K_N$  や  $p_0$  も変化させた場合の  $A_{1/2}$  の強度の変化を示した図である。Fig.9 では  $p_0 = 1.0\text{MPa}$ ,  $f_0 = 5\text{MHz}$ ,  $h = 20\mu\text{m}$  と一定とし、 $K_N$  と  $A_{\text{in}}$  を変化させた。この図の  $K_N = 0.5\text{MPa/nm}$  における値が Fig.8 の結果である。 $1/2$  分調波は、Fig.8 で見られた傾向と同様、 $A_{\text{in}}$  の限られた範囲内（この場合、約  $5\text{nm} \sim 17\text{nm}$ ）で観測され、また、 $K_N$  の領域もまた  $0.3\text{MPa/nm} \sim 1.5\text{MPa/nm}$  の限られた領域で観測された。

Fig.10 は、 $K_N = 0.5\text{MPa/nm}$ ,  $f_0 = 5\text{MHz}$ ,  $h = 20\mu\text{m}$  で一定とし、 $p_0$  と  $A_{\text{in}}$  を変化させたときの  $A_{1/2}$  強度分布図である。 $p_0 = 1.0\text{MPa}$  の位置が Fig.8 の結果に対応する。分調波領域は斜めの帯として示されており、一つは  $0.12 < p_0 (\text{MPa}) / A_{\text{in}} (\text{nm})$



**Fig.9** Relative  $1/2$  sub-harmonic amplitude for various incident amplitudes  $A_{\text{in}}$  and interfacial stiffnesses  $K_N$

$p_0 = 1.0\text{MPa}$ ,  $f_0 = 5\text{MHz}$ ,  $h = 20\mu\text{m}$



**Fig.10** Relative  $1/2$  sub-harmonic amplitude for various incident amplitudes  $A_{\text{in}}$  and contact pressures  $p_0$

$K_N = 0.5\text{MPa/nm}$ ,  $f_0 = 5\text{MHz}$ ,  $h = 20\mu\text{m}$

$< 0.16$  の領域に現れ、もう一つは、 $p_0$  (MPa) /  $A_{in}$  (nm) =  $1/12$  の直線付近に現れている。また、 $p_0$  (MPa) /  $A_{in}$  (nm)  $< 0.05$  の範囲では低周波成分が大きく現れる領域となっている。

この Fig.10 から、 $1/2$  分調波が発生する条件は、入射波により発生する引張応力と初期接触圧力の関係より考察することができる。平面調波の解から振幅  $A_{in}$  の場合に材料中に発生する引張応力の最大値は

$$\sigma_{max} = 2\pi f_0 \rho c A_{in} \quad \dots\dots\dots (11)$$

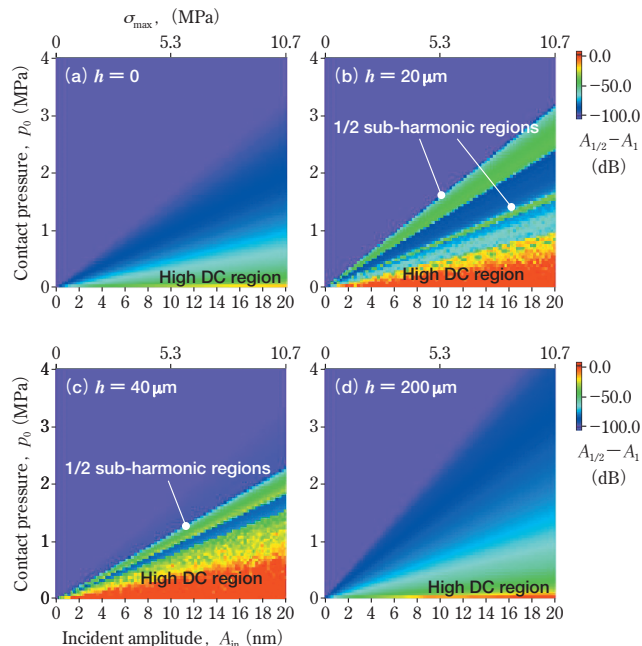
と書け、最大引張応力  $\sigma_{max}$  は入射波振幅  $A_{in}$  や周波数  $f_0$  に比例して変化し、Fig. 9 以降の分布図の上横軸に、式 (11) より算出された最大引張応力  $\sigma_{max}$  を書くことができる。Fig.10 では、接触圧力  $p_0$  を上回る  $\sigma_{max}$  が入力された場合に、分調波領域が現れており、分調波領域における  $A_{in}$  と  $p_0$  の比例関係は、圧力  $p_0$  で接触する界面を引きはがすのに十分な引張応力を入射波が有している場合に、分調波が発生しうることを定性的に示している。

#### 4.2 周波数依存性

Fig.11 に  $f_0$  と  $p_0$  を変化した場合の  $A_{1/2}$  の強度分布を示す。このとき  $A_{in} = 10$  nm,  $K_N = 0.5$  MPa/nm,  $h = 20$   $\mu$ m で一定とした。Fig.10 に示した場合同様、複数の斜めの帯状領域に  $1/2$  分調波の発生領域が示されている。これも上述の振幅を変化させた場合同様、式 (11) で表される通り、入射波による応力が周波数に比例するために現れる現象である。ただし Fig.10 と異なり、 $1/2$  分調波の現れる領域について、 $f_0$  と  $p_0$  の間に明瞭な線形関係が見られるわけではなく、下に凸の曲線状となっている。これは、入射波により材料中に発生する超音波の応力と接触界面に働く応力が同一でなく、その差異は周波数に依存することが主因であると考えている。

#### 4.3 膜厚依存性

膜厚の影響を検討するため、Fig.12 に様々な膜厚  $h$  に対する  $A_{1/2}$  強度分布を示す。この時  $f_0 = 5$  MHz,  $K_N = 0.5$  MPa/nm とした。また計算時の時間ステップ、空間ステップは上述の計算と同じ  $\Delta t = 1$  ns,  $\Delta x = 10$   $\mu$ m とし、薄膜部分のセル数を変化させることにより、(a)  $h = 0$ , (b)  $h = 20$   $\mu$ m,  $h = 40$   $\mu$ m,  $h = 200$   $\mu$ m の場合を計算した。(a) の膜厚  $h = 0$  とは、



**Fig.12** Relative 1/2 sub-harmonic amplitude distributions for various layer thicknesses  $h$

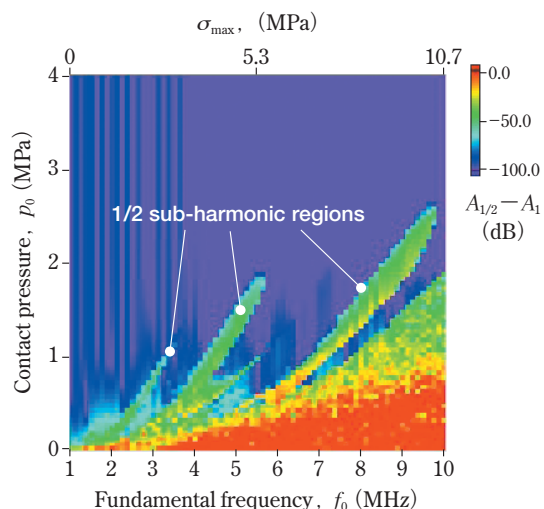
$$f_0 = 5 \text{ MHz}, K_N = 0.5 \text{ MPa/nm}$$

二つの分離パネ間に膜が無く、二つのブロックを突き合わせた状態を示す。(b)の  $h = 20$   $\mu$ m は Fig.10 と全く同じ図である。

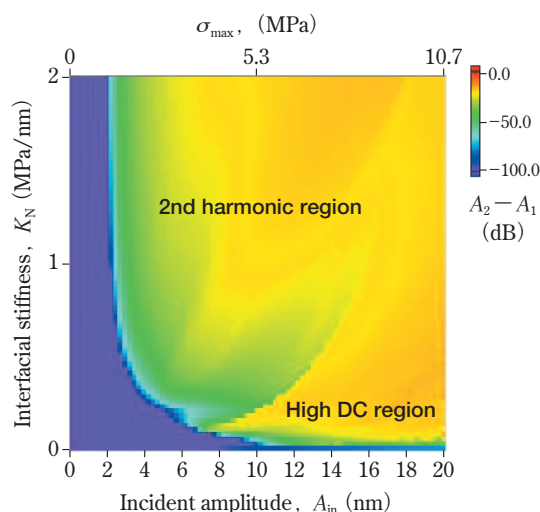
(b)  $h = 20$   $\mu$ m, (c)  $h = 40$   $\mu$ m の場合については、その強度や領域の大きさに違いはあるものの、斜めの帯状に  $A_{1/2}$  強度が大きい領域が現れた。しかし、(d) の膜厚が厚い  $200$   $\mu$ m のものや (a) の膜がなく単に二つのブロックを突き合わせた場合についても全く分調波が得られなかった。すなわち、ここでの計算範囲において、このような接触界面における分調波の発生には適切な厚さの薄膜構造が必要であると言える。

#### 4.4 分離パネモデルに対する $1/2$ 分調波と二次高調波発生 の比較

Fig.7 の周波数スペクトル中に示されているように、分離パネを透過した波形には、 $1/2$  分調波だけでなく基本周波数の二倍、三倍の周波数成分である二次、三次などの高次高調波

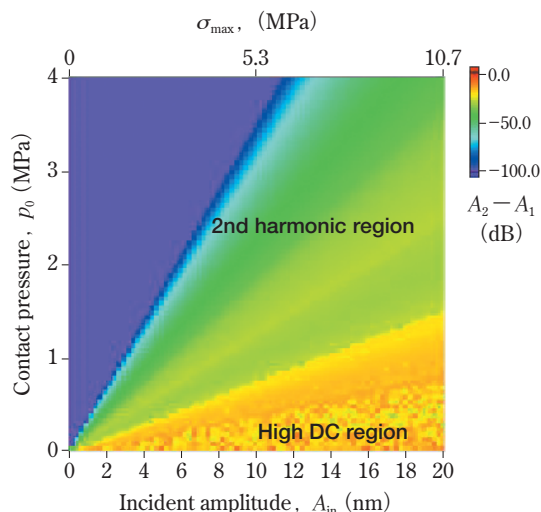


**Fig.11** Relative 1/2 sub-harmonic amplitude for various fundamental frequencies  $f_0$  and contact pressures  $p_0$   
 $A_{in} = 10$  nm,  $K_N = 0.5$  MPa/nm,  $h = 20$   $\mu$ m



**Fig.13** Relative 2nd harmonic amplitude for various incident amplitudes  $A_{in}$  and interfacial stiffnesses  $K_N$





**Fig.14** Relative 2nd harmonic amplitude for various incident amplitudes  $A_{in}$  and contact pressures  $p_0$

成分も含まれている。そこで、**Fig.13, 14**に、二次高調波の相対振幅分布図を示した。Fig.13, 14はそれぞれ、Fig.9, 10の計算と同一の波形から二次高調波の成分を抽出したものである。Fig.9とFig.13との比較およびFig.10とFig.14との比較のいずれにおいても1/2分調波の発生領域に比べ、広い領域で二次高調波成分が出現していることが分かる。

これは、二次高調波と1/2分調波の発生機構の違いを示していると考えられる。二次高調波は、外部の強制振動に対し、圧縮側と引張側で差異がある場合に必ず出現する。ここで使用した分離バネモデルでは、引張側でバネの分離を伴う場合に引張側と圧縮側で差異が生じて二次高調波が発生する。つまり、二次高調波の発生はバネの分離が起こったことを示している。一方、1/2分調波はバネの分離だけでなく、膜における複雑な振動が寄与して、発生していると考えられるため、二次高調波の発生領域に比べ、小さい領域にその発生領域が現れたのである。

#### 4.5 無次元パラメータによる考察

上述の検討では、これまで行った実験的検討を念頭に、各パラメータの範囲を設定し考察した。これらのパラメータは、基準量において正規化した無次元パラメータとして扱うことで、関連が明らかになる。例えば、長さのパラメータに対し入射波周波数 $f_0$ のときの波長 $\lambda_0$ で、圧力(応力)のパラメータに対し $\rho c^2$ で割ると、界面剛性 $K_N$ 、接触圧力 $p_0$ 、膜厚 $h$ 、入射波振幅 $A_{in}$ は以下のような無次元パラメータとして表記できる。

$$\bar{K}_N = \frac{K_N \lambda_0}{\rho c^2}, \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{\rho c^2}, \quad \bar{h} = \frac{h}{\lambda_0}, \quad \bar{A}_{in} = \frac{A_{in}}{\lambda_0} \quad \dots\dots (12)$$

これより、材料が同一( $\rho c_L$ が一定)である場合、波長を変化させると、膜厚や振幅だけでなく界面剛性 $K_N$ も波長に依存することが分かる。また、長さのパラメータを膜厚 $h$ で無次元化すると、

$$\bar{K}_N = \frac{K_N h}{\rho c^2}, \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{\rho c^2}, \quad \bar{f}_0 = \frac{f_0 h}{c}, \quad \bar{A}_{in} = \frac{A_{in}}{h} \quad \dots\dots (13)$$

となる。つまり膜厚を変化させた場合に、 $f_0$ や $A_{in}$ だけでなく界面剛性 $K_N$ も膜厚 $h$ に依存することが分かる。一般に線形等方弾性体中の超音波伝搬を考える場合、波長や振幅、各箇

所のサイズといった長さパラメータが相似関係であれば同一の伝搬挙動を示すと考えるが、接触界面剛性 $K_N$ を導入した今回の数値計算においては、界面剛性が長さのパラメータに依存しており、長さにおける相似関係は成立していない。このことから、本報において1/2分調波の発生に関し、具体的な指針を述べることは容易ではなく、定性的な議論に留まっている。

## 5. 結言

本研究では、アルミ合金ブロック間にアルミ箔を挿入した構造において1/2分調波の発生する現象に対し数値解析を行った。接触界面において分離するバネモデルを導入し、一次元FDTD法による数値計算を行った結果、1/2分調波振幅の基本波振幅依存性など実験結果と同様の傾向が見られた。さらに、界面剛性、接触圧力、入射波振幅、入射波基本周波数、膜厚を変化させたときの1/2分調波振幅の影響を調べた結果、適切な厚さの薄膜がある場合に、限られた範囲において1/2分調波が発生することが示された。また、二次高調波が現れる領域と比較した結果、二次高調波はバネの分離が起こる広い領域で現れたのに対し、その領域内の一部に現れた。これらの結果は、1/2分調波がバネの分離だけでなく、複雑な薄膜における振動の影響を受けて発生することを示している。

## 謝辞

本研究の遂行にあたり、京都大学大学院工学研究科琵琶志朗教授には多大なご助言をいただきました。また、本研究は平成26年度日本非破壊検査協会研究助成により行われました。記してここに謝意を表します。

## 参考文献

- 1) 音弾性の基礎と応用, 福岡編, オーム社, (1993)
- 2) I. Solodov: Ultrasonic of non-linear contacts: propagation, reflection and NDE- applications, Ultrasonics, 36(1-5), pp.383-390, (1998)
- 3) I. Solodov, N. Krohn and G. Busse: CAN: an example of nonclassical acoustic nonlinearity in solids, Ultrasonics, 40(1-8), pp.621-625, (2002)
- 4) I. Solodov, J. Wackerl, K. Pfeleiderer and G. Busse: Nonlinear self-modulation and subharmonic acoustic spectroscopy for damage detection and location, Appl. Phys. Lett., 84(26), pp.5386-5388, (2004)
- 5) K. Kawashima, M. Murase, R. Yamada, M. Matsushima, M. Uematsu and F. Fujita: Nonlinear ultrasonic imaging of imperfectly bonded interfaces. Ultrasonics, 44, pp.e1329-e1333, (2006)
- 6) K. Kawashima, T. Ito and Y. Nagata: Detection and imaging of nonmetallic inclusions in continuously cast steel plates by higher harmonics, Jpn. J. Appl. Phys., 49, 07HC11, (2010)
- 7) K. Yamanaka, T. Mihara and T. Tsuji: Evaluation of closed cracks by model analysis of subharmonic ultrasound, Jpn. J. Appl. Phys., 43(5B), pp.3082-3087, (2004)
- 8) Y. Ohara, T. Mihara and K. Yamanaka: Effect of adhesion force between crack planes on subharmonic and DC responses in nonlinear ultrasound., Ultrasonics, 44(2), pp.194-199, (2006)



- 9) Y. Ohara, T. Mihara, R. Sasaki, T. Ogata, S. Yamamoto, Y. Kishimoto and K. Yamanaka : Imaging of closed cracks using nonlinear response of elastic waves at subharmonic frequency, *Appl. Phys. Lett.*, 90(1), 011902, (2007)
- 10) Y. Ohara, H. Endo, T. Mihara and K. Yamanaka : Ultrasonic measurement of closed stress corrosion crack depth using subharmonic phased array, *Jpn. J. Appl. Phys.*, 48(7), 07GD01, (2009)
- 11) J. M. Richardson : Harmonic generation at an unbonded interface- I. Planar interface between semi - infinite elastic media, *Int. J. Eng. Sci.*, 17, pp.73-85, (1979)
- 12) J. Baik and R. B. Thompson : Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: A quasi-static model, *J. Nondestruct. Eval.*, 4(3), pp.177-196, (1984)
- 13) S. I. Rokhlin and Y. J. Wang : Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(3), pp.503-515, (1991)
- 14) S. I. Rokhlin and Y. J. Wang : Equivalent boundary conditions for thin orthotropic layer between two solids: reflection, refraction, and interface waves, *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(4), pp.1875-1887, (1992)
- 15) A. I. Lavrentyev and S.I. Rokhlin : Determination of elastic moduli , density , attenuation , and thickness of a layer using ultrasonic spectroscopy at two angles, *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(6), pp.3467-3477, (1997)
- 16) A. Baltazar, S.I. Rokhlin and C. Pecorari : On the relationship between ultrasonic and micromechanical properties of contacting rough surfaces, *J. Mech. Phys. Solids*, 50, pp.1397-1416, (2002)
- 17) A. Baltazar, L. Wang, B. Xie and S.I. Rokhlin : Inverse ultrasonic determination of imperfect interfaces and bulk properties of a layer between two solids, *J. Acoust. Soc. Am.*, 114(3), pp.1424-1434, (2003)
- 18) B. W. Drinkwater, R. S. Dwyer-Joyce and P. Cawley : *Proc. R. Soc. A.*, 452, p.2613, (1996)
- 19) S. Biwa, S. Nakajima and N. Ohno : On the Acoustic Nonlinearity of Solid-Solid Contact With Pressure-Dependent Interface Stiffness, *J. Appl. Mech.*, 71(4), pp.508-515, (2004)
- 20) B. Korshak, I.Y. Solodov and E. M. Ballad : DC effects, sub-harmonics, stochasticity and "memory" for contact acoustic non-linearity., *Ultrasonics*, 40(1-8), pp.707-713, (2002)
- 21) S. Delrue and K. V. D. Abeele : Three-dimensional finite element simulation of closed delaminations in composite materials., *Ultrasonics*, 52(2), pp.315-324, (2012)
- 22) T. Hayashi and S. Biwa : Subharmonic wave generation at interfaces of a thin layer between metal blocks, *Jpn. J. Appl. Phys.*, 52, 07HC02, (2013)
- 23) K. L. Jhonson : *Contact mechanics*, Cambridge University Press, (1987)
- 24) J. Greenwood and J. B. P. Williamson : Contact of nominally flat surfaces, *Proc. R. Soc. A.*, 295(1442), pp.300-319, (1966)
- 25) K. L. Johnson, K. Kendall and A. D. Roberts : Surface energy and the contact of elastic solids, *Proc. R. Soc. A.*, 324(1558), pp.301-313, (1971)
- 26) B. Derjaguin, V. Muller and Y. Toporov : Effect of contact deformations on the adhesion of particles, *J. Colloid Interface Sci.*, 53(2), pp.314-326, (1975)
- 27) L. Kogut and I. Etsion : Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat, *J. Appl. Mech.*, 69(5), pp.657-662, (2002)
- 28) J.-Y. Kim and J.-S. Lee : *J. Appl. Phys.* A micromechanical model for nonlinear acoustic properties of interfaces between solids, 101(4), 043501, (2007)
- 29) P. Fellingner, R. Marklein, K. J. Langenberg and S. Klaholz : Numerical modeling of elastic wave propagation and scattering with EFIT - elastodynamic finite integration technique, *Wave Motion*, 21, pp.47-66, (1995)
- 30) K. F. Graff : *Wave motion in elastic solids* (Oxford University Press, London), pp.9-29, (1975)